ДОМАШНИЙ УЧИТЕЛЬ

Р.В. Рудович

Проверяем домашние задания

Геометрия

7 класс

К учебному пособию для 7 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения «Геометрия 7» (автор В.В. Казаков, 2017 г.)

2-е издание

Минск
«Сэр-Вит»

От автора

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать одну из древнейших наук – ГЕОМЕТРИЮ.

Нет смысла объяснять, как важно знать, что изучает геометрия. Вы уже достаточно взрослые и сами представяете, что без знания формы, размеров и расположения предметов в пространстве относительно друг друга, не было бы такого уникального здания, как Национальная библиотека Республики Беларусь.

Изучая геометрию, вы познакомитесь не только с линиями и плоскими фигурами, но и с геометрическими объемными телами, научитесь применять геометрические знания в практической деятельности, при решении задач. Умение решать геометрические задачи, что особенно важно!, позволит вам правильно объяснить существующие в природе закономерности, глубже усвоить сущность геометрических теорем и формул. А чтобы повысить эффективность постижения основ геометрии, необходимо искать пути, которые будут способствовать усвоению учебной программы.

Данное пособие, которое предлагает автор, в некоторой степени будет помощником в преодолении трудностей при постижении геометрических теорем, решении задач, построении фигур.

Однако не торопитесь заглядывать в приведенные рассуждения и решения. Вначале попытайтесь выполнить задание самостоятельно, а затем сравнить с предложенным в пособии, проанализировать возможные ошибки и устранить недочеты.

Рекомендации содержат решения задач, рисунки к ним и ответы. Краткую запись условия, если она не дана, следует сделать самостоятельно, используя условие задачи.

Успехов вам в постижении геометрии!

§ 2. Предмет геометрии

Решаем самостоятельно

2. У куба все грани – квадраты (всего 6 граней), соответственно, все ребра, которых у куба 12, имеют одинаковую длину. Тогда длина одного ребра: $a = 60$ см : $12 = 5$ см.
Найдем площадь одной грани квадрата: $S_{гр} = a^2$; $S = 25$ (см^2).
Тогда площадь всей поверхности куба $S_п = 6a^2 = 6 \cdot 25$ (см^2) $= 150$ (см^2).

3. У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники (всего 6 граней), причем боковые противоположные грани равны. Значит, равны между собой прямоугольники, лежащие в основаниях. Площадь основания в нашем случае $S = ab = 3$ см $\cdot$ 4 см = 12 см^2.
Площадь боковой поверхности параллелепипеда будет равна:

$$S_б = 2(a + b) \cdot c; \; S_б = 2 \cdot (3 \text{ см} + 4 \text{ см}) \cdot 5 \text{ см} = 70 \text{ см}^2.$$

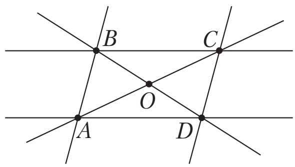
Тогда площадь всей поверхности параллелепипеда

$$S_п = 12 \text{ см}^2 + 12 \text{ см}^2 + 70 \text{ см}^2 = 94 \text{ см}^2.$$

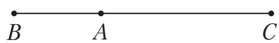
§ 3. Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная

Решаем самостоятельно

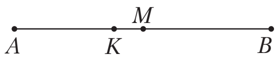
1. На плоскости отмечаем точки A, B, C и D, которые задают 6 прямых: AB, BC, CD, AD, BD и AB. Эти пары точек задают 10 отрезков: AB, BC, CD, AD, BD, AB, AO, OC, OB и OD, а также 12 лучей: по 3 луча, выходящих из каждой точки A, B, C и D.



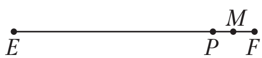
2. По условию $AB = 14$ см, $BC = 32$ см, $AC = 18$ см. Следовательно, $BC = BA + AC = 14$ см $+ 18$ см $=$ $= 32$ см, т. е. точка A расположена между точками B и C.



3. а) По условию $AB = 56$ см, $MB - AM = 4$ см.
Следовательно, $AB = AM + MB = 56$ см.



Поскольку $MB = 4$ см $+ AM$, значит, $AB = 56$ см $= AM + AM + 4$ см $=$ $= 2 \cdot AM + 4$ см, откуда $AM = (56$ см $- 4$ см$) : 2 = 26$ см.
Тогда $MB = 26$ см $+ 4$ см $= 30$ см.
б) По условию $EF = 24$ дм, $EP = 3 \cdot PF$, $PM = MF$.
Поскольку отрезок $EF = EP + PF = 3 \cdot PF + PF =$ $= 4PF = 24$ дм, то $PF = 24$ дм : $4 = 6$ дм.

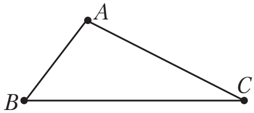


Значит, $PM = PF : 2 = 3$ дм, $EP = 3 \cdot PF = 18$ дм,
тогда $EM = EP + PM = = 18$ дм $+ 3$ дм $= 21$ дм. *Ответ*: $EM = 21$ дм.

4. По условию $3AM = 2MB$, $AK = 2KM$ и $AK - KM =$ $= 12$ см. Следовательно $2KM - KM = 12$ см, т. е. $KM = 12$ см, значит, $AK = 24$ см; $AM = AK + KM$; $AM = 24 + 12 = = 36$ (см). Тогда $3AM = 3 \cdot 36 = 2 \cdot MB$, откуда находим $MB = (3 \cdot 36) : 2 = 54$ (см). $AB = AM + MB = 36$ см $+ 54$ см $= 90$ см.

Ответ: $AB = 90$ см.

5. а) Если отрезки имеют длину $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см, то они не могут лежать на одной прямой, так как $AB + AC = 5$ см $+ 8$ см $= 13$ см $\neq BC = 10$ см. В этом случае точки A, B и C образуют треугольник ABC.



Ответ: в этом случае три точки не могут лежать на одной прямой.

б) Если отрезки имеют длину $AB = 6{,}8$ дм, $AC = 5{,}5$ дм, $BC = 12{,}3$ дм, следовательно, $AB + AC = 6{,}8$ дм $+ 5{,}5$ дм $= 12{,}3$ дм $= BC =$ $= 12{,}3$ дм, т.е. точки B, A и C лежат на одной прямой BC, причем точка A расположена между точками B и C.

6. Ломаные, изображенные на рис. 43 учеб. пособия:
а) непростая незамкнутая ломанная (есть пересечение не соседних отрезков);
б) простая незамкнутая ломаная;
в) простая замкнутая ломаная;
г) непростая замкнутая ломаная.

8. Пусть длина первого звена ломаной равна a см, тогда длина второго звена равна $2a$ см, третьего – $4a$ см, четвертого – $8a$ см, пятого звена – $16a$ см. По условию общая длина пятизвенной ломаной

$$l = a \text{ см} + 2a \text{ см} + 4a \text{ см} + 8a \text{ см} + 16a \text{ см} = 31a \text{ см} = 186 \text{ см},$$

откуда длина первого звена $a = 186$ см $: 31 = 6$ см. Значит, длина самого большого пятого звена равна: $l_5 = 16a$ см $= 96$ см.

9. Треугольник ABC (рис. 44 учеб. пособия) – трехзвенная замкнутая ломаная, причем $AM = MB$, $BK = = KC$, $AN = NC$, а также $KE = EC$, $AG = GN$, $MP = PB$.

а) Если $PB + EC + GA = 12$ см, то длина ломаной – это периметр треугольника:
$P = AB + BC + AC$, где $AB = 2MB = 4PB$, $BC = 2KC = 4EC$, $AC = 2AN = 4AG$, значит, $P = 4PB + 4EC + 4AG = 4(PB + EC + AG) = 4 \cdot 12$ (см) $= 48$ (см).

б) Если $AP + BE + CG = 108$ см, то с учетом условия находим:

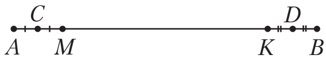
$$AB = AM + MB = AM + (MP + PB) = AP + BB = \frac{4}{3}CG, \quad \text{тогда}$$

$$P = AB + BC + AC = \frac{4}{3}AP + \frac{4}{3}BE + \frac{4}{3}CG = \frac{4}{3}(AP + BE + CG) = \frac{4}{3} \cdot 108 =$$

$= 144$ (см).

Ответ: а) $P = 48$ см; б) 144 см.

10*. По условию $AM + MK + KB = AB$, $AC = CM$, $KD = DB$. Найти длину CD.

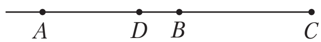


а) $AB = 32$ см, $MK = 12$ см. Обозначим $AC = x$, $DB = y$, тогда $AB = MK + 2x + 2y = 12 + 2(x + y) = 32$ (1);
$AB = CD + x + y = CD + (x + y) = 32$ (2).
Из равенства (1): $(x + y) = (32 - 12) : 2 = 10$; из равенства (2): $CD = 32 - (x + y) = 32 - 10 = 22$ (см), $CD = 22$ см.
б) Пусть $AB = a$, $MK = b$. Учитывая решение а), получим:

$$CD = (AB - MK) : 2 + MK = \frac{AB}{2} + \frac{MK}{2} = \frac{(AB + MK)}{2} = \frac{(a + b)}{2} = 0{,}5(a + b).$$

Ответ: а) $CD = 22$ см; б) $CD = 0{,}5(a + b)$.

11*. По условию точки A, B и C лежат на одной прямой. Чтобы сумма расстояний от точки D, лежащей на этой прямой, до точек A, B и C была наименьшей, точка D должна лежать как можно ближе к средней точке, т.е. к точке B, поскольку $AD + DB + DC = (AD + DC) + DB = AC + DB$, тогда при $DB \to 0$, сумма расстояний будет наименьшей.



Если на прямой отмечены четыре точки A, B, C и D, то суммарное расстояние от пятой точки K до заданных четырех будет наименьшим, если точка K будет лежать между точками B и C, поскольку $KA + KB + KC + KD =$ $= (KA + KD) + (KB + KC) = AD + BC$, т.е. точка K может лежать в любом месте между точками B и C при одинаковом результате.

12*. Прямая EG из всех указанных в условии задачи прямых пересекает только прямые AD и AM (рис. 45 учеб. пособия). Простые замкнутые ломаные с концами в точке A, звенья которой являются ребрами куба, это – $ABCD$; $AMKD$ и $AMNB$. Аналогично, простые замкнутые ломаные с концами в точке P: $PCDK$; $PNMK$ и $PNBC$.

Геометрия 3D

Задача (рис. 46 учеб. пособия). По условию в основании параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 16$ см $: 4 = 4$ см. Значит, все боковые грани параллелепипеда – равные между собой прямоугольники. Грань AA_1D_1D имеет периметр $P_1 = 20$ см, следовательно,
$CC_1 = AA_1 = (20$ см $- 4$ см $- 4$ см$) : 2 = 6$ см. Тогда:
а) Длина пространственной ломаной $ABCC_1D_1A_1$:
$l = AB + BC + CC_1 + C_1D_1 + D_1A_1$; $l = 4$ см $+ 4$ см $+ 6$ см $+ 4$ см $+ 4$ см $= 22$ см.
б) Периметр грани DD_1C_1C равен периметру грани AA_1D_1D: $P = P_1 = 20$ см.
Площадь любой боковой грани $S = D_1D \cdot DC = 4$ см $\cdot$ 6 см $= 24$ см^2.

в) Объем параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной a: $V = a^2 \cdot h$, где $a = AB = 4$ см, высота $h = CC_1 = 6$ см; значит $V = (4 \cdot 4 \cdot 6)$ см^3 = 96 см^3.

Моделирование

а) Используя карту Беларуси с масштабом 1 : 750 000 находим расстояния по прямой между городами:
Минск – Могилев: $s_1 = 184$ км, (по карте $l_1 = 24{,}5$ см);
Могилев – Гомель: $s_2 = 169$ км, (по карте $l_2 = 22{,}5$ см);
Гомель – Брест: $s_3 = 495$ км, (по карте $l_3 = 66{,}0$ см);
Брест – Гродно: $s_4 = 176$ км, (по карте $l_4 = 23{,}5$ см);
Гродно – Витебск: $s_5 = 446$ км, (по карте $l_5 = 59{,}5$ см);
Витебск – Минск: $s_6 = 225$ км, (по карте $l_6 = 30{,}0$ см);
Значит, длина всего маршрута:
$s_0 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 184 + 169 + 495 + 176 + 446 + 225 = 1695$ (км).
б)* Самый короткий замкнутый маршрут между столицей Беларуси и всеми областными центрами будет, если следовать:
Минск $\to$ Гомель $\to$ Могилев $\to$ Витебск $\to$ Гродно $\to$ Брест $\to$ Минск. Его протяженность:
$s_0 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 278$ км + 169 км + 143 км + 446 км + 176 км + + 326 км = 1538 км.

Реальная геометрия

а) Из рисунка учебного пособия видно, что при самом экономном варианте разрезания трубы длиной 6 м на каркас понадобится 4 куска трубы по 5,4 м, т. е. для этого понадобится 4 трубы. Для поперечных деталей длиной 3,5 м и вертикальных длиной 2,5 м понадобится еще 4 трубы по 6 м (6 м = 3,5 м + 2,5 м). В целом, для сооружения каркаса гаража в самом экономном варианте пойдет всего 8 труб по 6 м, т. е. 6 м · 8 = 48 м.
б*) На обрезку уйдет: 4 · (6 м – 5,4 м) = 4 · 0,6 м = 2,4 м.
Составляем пропорцию:
48 м – 100 %
2,4 м – x %
откуда находим: x = (2,4 м · 100 %): 48 м = 240 % : 48 = 5 %.

§ 4. Окружность и круг

Решаем самостоятельно

13. По рис. 53 учебного пособия находим радиусы OA, OB и OC; диаметр AB; хорды DC и AB.

Сектор COB и дополнительный $OBDACO$; AOC и дополнительный $OADBCO$; $CAOBC$ и дополнительный $ADBOA$.

Дуги окружности: $\cup AC$; $\cup ACB$; $\cup CB$; $\cup CBD$; $\cup BD$; $\cup BDA$; $\cup DA$; $\cup DAC$; $\cup DACB$; $\cup CBDA$;

сегменты круга $DACD$ и дополнительный $DBCD$; $ACBA$ и $ADBA$.

14. По рис. 53 учебного пособия находим:

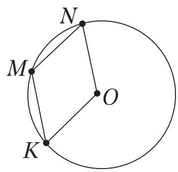
а) если $OC = R = 12{,}5$ см, то $AB = 2R = 25$ см.

б) если $AB = 2R = 118$ см, то $DO = R = 0{,}5 \cdot AB = 59$ см.

в) если $AB + OC = 2R + R = 48$ м, то $R = 48$ м $: 3 = 16$ м.

Тогда $DO + OB = R + R = 32$ м.

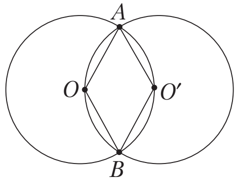
15. По условию $D = 2R = 35$ см, $MK = MN = R$. Найдем длину замкнутой ломаной $OKMN$:



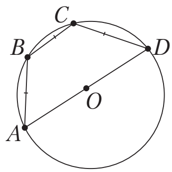
$$l = OK + KM + MN + NO = R + R + R + R = 4R = 4 \cdot \frac{D}{2} =$$

$$= 2 \cdot D = 2 \cdot 35 \text{ см} = 70 \text{ см}.$$

16. По условию каждая окружность проходит через центр другой окружности. Следовательно, окружности имеют одинаковый радиус: $R = 3{,}5$ см. Четырехугольник $OAO'B$ – ромб, поскольку $OA = AO' = O'B = BO = R = 3{,}5$ см. Тогда периметр четырехугольника $OAO'B$: $P = 4R = 2D = 14$ (см).



17. По условию $AB = BC = CD = R$, $AD = D = 2R$, периметр четырехугольника $ABCD$ равен 60 см. Поскольку $P = AB + BC + CD + AD = 5R$; $P = 60$ (см), следовательно, $R = 60$ см $: 5 = 12$ см, диаметр окружности $D = 2R = 24$ (см).



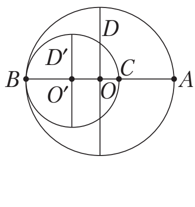
18*. По условию диаметр колеса $D = 64$ см, значит, длина окружности колеса $l = \pi D$, где число $\pi \approx 3{,}14$; пройденное расстояние $s = 100$ м. Найдем количество оборотов колеса велосипеда: $N = s : \pi D$. Следовательно, $N = 100$ м $: (3{,}14 \cdot 0{,}64$ м$) \approx 49{,}7$ оборотов, т. е. $N = 49$ полных оборотов.

19*. Дано: $AC = 6$ см; $AB = AC + BC$. OO' – ?

$AB = D$; $CB = D'$. Расстояние $OO' = R - R'$, где R – радиус большей окружности ($R = \frac{AB}{2}$), R' – радиус меньшей окружности. По условию

$D = D' + AC = (D' + 6)$ см; $R = \frac{D}{2}$, $R' = \frac{D'}{2}$. Тогда

$$R - R' = \frac{D}{2} - \frac{D'}{2} = \frac{D'+6}{2} - \frac{D'}{2} = \frac{D'}{2} + \frac{6}{2} - \frac{D'}{2} = 3 \text{ (см)}.$$



СОДЕРЖАНИЕ